SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

APLICACIÓN DE LA DERIVADA. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS.

Para los ejercicios de determinación de parámetros seguiremos el siguiente esquema:

Sea $f = ax^3 + bx^2 - cx + d \to f' = 3ax^2 + 2bx - c \to f'' = 6ax + 2b$

1• Si dice pasa por (3, 2) $\to f(3) = 2 \to 2 = 27a + 9b - 3c + d$

2• Si dice tiene un $\left\{\begin{matrix}\text{extremo}\\ \text{máximo}\\ \text{mínimo}\end{matrix}\right\}$ en $x = 3 \to f'(3) = 0 \to 0 = 27a + 6b - c$

3• Si dice tiene un $\left\{\begin{matrix}\text{extremo}\\ \text{máximo}\\ \text{mínimo}\end{matrix}\right\}$ en $(2, -1) \to$

$$\begin{cases}\text{pasa por } (2,-1) \to f(2) = -1 \to -1 = 8a + 4b - 2c + d\\ \text{extremo para } x = 2 \to f'(2) = 0 \to 0 = 12a + 4b - c\end{cases}$$

4• Si dice tiene un punto de inflexión en $x = -2 \to f''(-2) = 0 \to 0 = -12a + 2b$

5• Si dice tiene un punto de inflexión en $(1, 3) \to \begin{cases}\text{pasa por } (1,3) \to f(1) = 3 \to 3 = a + b - c + d\\ f''(1) = 0 \to 0 = 6a + 2b\end{cases}$

Si habla de la recta tangente $\to f'(x) = m$ (pendiente de la recta tangente)

6• Si dice tiene $\underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0}$ en $x = 3 \to f'(3) = 0 \to 0 = 27a + 6b - c$

7• Si dice tiene tangente paralela a $\underbrace{y = 2x - 1}_{m=2}$ en $x = 4 \to f'(4) = 2 \to 2 = 48a + 8b - c$

8• Si dice la tangente en $x = -2$ $\underbrace{\text{forma un ángulo de 45º}}_{\text{tag } 45=1=m}$ con el eje X $\to f'(-2) = 1 \to$

$1 = 12a - 4b - c$

9• Si dice tiene $\underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0}$ en $(1, 0) \to$

$$\begin{cases}\text{Pasa por } (1,0) \to f(1) = 0 \to 0 = a + b - c + d\\ \underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0} \text{ en } (1,0) \to f'(1) = 0 \to 0 = 6a + 2b\end{cases}$$

Ejercicios de selectividad de la U.I.B.

1. U.I.B. 2019. Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determinar los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en dicho punto. Hallarla.
VER VÍDEO https://youtu.be/PSXtCamcLuM

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$; $g'(x) = 1 - 2cx$
f(x) pasa por (1, 0); $f(1) = 0$; $1 + a + b = 0$
g(x) pasa por (1, 0); $g(1) = 0$; $1 - c = 0 \to c = 1$
tienen la misma tangente; $f'(1) = g'(1)$; $4 + 2a + b = 1 - 2c$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \to \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

La recta tangente es $y = f(1) + f'(1)\cdot(x - 1)$; $y = 0 - (x - 1)$

2. U.I.B. 2016. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en x = 2 y un punto de inflexión en x = 3. Calcular los valores de a y b, y determinar si este extremo es máximo o mínimo relativo.
VER VÍDEO https://youtu.be/gw-C-kp5_mY

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \to f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a$
Un extremo en $x = 2 \to f'(2) = 0 \to 12 + 4a + b = 0 \to b = 24$
Un punto de inflexión en $x = 3 \to f''(3) = 0 \to 18 + 2a = 0 \to a = -9$

$f''(2) < 0 \to$ máximo.

3. U.I.B. 2015 (I). Determinar los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en x = - 1 y un mínimo relativo en x = 0.
VER VÍDEO https://youtu.be/SkclLsirwyI

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$

$$\begin{cases} \text{Pasa por } (1,0) \to f(1) = 0 \to 1 + a + b + c = 0 \\ \text{Máx. rel en } x = -1 \to f'(-1) = 0 \to 3 - 2a + b = 0 \\ \text{Mín. rel. en } x = 0 \to f'(0) = 0 \to b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}; f'(x) = 3x^2 + 3x; f''(x) = 6x + 3 \to \begin{cases} \overbrace{f''(-1) < 0}^{\text{confirma un máximo}} \\ \underbrace{f''(0) = 0 > 0}_{\text{confirma un mínimo.}} \end{cases}$$

4. U.I.B. 2012. La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 7 en el. x = 3. Determina los valores de p y q.
VER VÍDEO https://youtu.be/aC4HN0etWIE

$f(x) = x^3 + px^2 + q \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2px$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $(3, 7) \underbrace{\rightarrow}_{\text{esquema punto 3}} \begin{cases} f(3) = 7 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27 + 9p + q = 7 \\ 27 + 6p = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} p = \frac{-9}{2} \\ q = \frac{41}{2} \end{cases} \rightarrow f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{41}{2}$$

Para verificar la existencia de un máximo resolvemos $f'(x) = 0$

$3x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f''(x) = -9 < 0 \rightarrow \text{Máximo relativo en } \left(0, \frac{41}{2}\right) \\ x = 3 \end{cases}$

5. U.I.B. 2011 Calcula a y b para que la función $f(x) = a.\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos relativos en x = 1 y x = 3.

VER VÍDEO https://youtu.be/4rcGnYirdGw

$f(x) = a.\ln x + bx^2 + x \rightarrow f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$

$\left.\begin{array}{l} \text{Extremo relativo en } x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow a + 2b + 1 = 0 \\ \text{Extremo relativo en } x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{3} \\ b = \frac{-1}{6} \end{cases}$

$f(x) = \frac{-2}{3}.\ln x + \frac{-1}{6}x^2 + x \rightarrow f'(x) = \frac{-2}{3x} + \frac{-1}{3}x + 1 \rightarrow f''''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$

$f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo.

$f''(2) = \frac{-1}{6} < 0 \rightarrow$ en $x = 2$ hay un máximo.

6. Se considera la función f(x). Dar el valor de a para que tenga un mínimo relativo en x = 1

$$\mathbf{f(x) = x.\ln\frac{x}{a}, a > 0}$$

$f(x) = x.\ln\frac{x}{a} \rightarrow f'(x) = \ln\frac{x}{a} + 1 \rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$

Mín. relativo en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 0 = \ln\frac{1}{a} + 1 \rightarrow \ln\frac{1}{a} = -1 \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{a} \rightarrow a = e$

Como $f''(1) = 1 > 0$ confirma un mínimo en $x = 1$.

7. Se considera la función: $f(x) = a.e^{x^2+bx+c}$. Calcula los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto (1, a) y f(0) = 1.

VER VÍDEO https://youtu.be/ Dar4Zve7r0

Mínimo en (1, a)

$$\begin{cases} \text{pasa por } (1,a) \to f(1) = a \to a = a.e^{1+b+c} \to e^{1+b+c} = 1 \to 1+b+c = 0 \\ \text{mínimo en } (1,a) \to \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(x) = a.(2x+b)e^{x^2+bx+c} \end{cases} \to 0 = a.(2+b)e^{1+b+c} \to b = -2 \end{cases}$$

Como 1 + b + c = 0, si b = – 2 → c = 1
f(0) = 1 → 1 = a.e^c; si c = 1 → a = 1/e

8. Dada la función f(x), calcula a y b de forma que la gráfica de f(x) pasa por (3, 10) y tenga tangente horizontal en este punto.

$$\mathbf{f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/hD-9Xc5EOpk

$f(x) = 2ax + b + \dfrac{36}{x} \to f'(x) = 2a - \dfrac{36}{x^2}$
Si pasa por (3, 10) → f(3)=10 → 6a + b + 12 = 10
Si tiene tangente horizontal en (3,10) $\to f'(x) = m \to f'(3) = 0 \to 2a - \dfrac{36}{9} = 0$
De donde a = 2 y b = – 14.

9. Considerarla función f(x) = $ax^3 + x^2 + bx + 7$. Determinar los valores de los parámetros a y b para que la función tenga un extremó relativo en x = - 1 y otro en x = 3.

f(x) = $ax^3 + x^2 + bx + 7$ → f'(x) = $3ax^2 + 2x + b$

$$\begin{cases} \text{Tiene un extremo en } x = -1 \to f'(-1) = 0 \to 3a - 2 + b = 0 \\ \text{Tiene un extremo en } x = 3 \to f'(3) = 0 \to 27a + 6 + b = 0 \end{cases} \begin{cases} a = \dfrac{-1}{3} \\ b = 3 \end{cases}$$

10. Dada la función f(x), hallar a y b de forma que la gráfica pase por el punto (3, 4) y tenga tangente horizontal en dicho punto.

$$\mathbf{f(x) = ax + b + \frac{3}{x}}$$

$f(x) = ax + b + \dfrac{3}{x} \to f'(x) = a - \dfrac{3}{x^2}$
Pasa por $(3,4) \to f(3) = 4 \to 4 = 3a + b + 1 \to 3a + b - 3 = 0$
Tangente horizontal en $(3,4) \to f'(3) = m \to f'(3) = 0 \to 0 = a - \dfrac{3}{9} \to a = \dfrac{1}{3}$
Si $a = \dfrac{1}{3} \to b = 2.$

11. Sea f : R → R la función definida por: f(x) = $2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta y = 2 x + 3. a = 26 y b = 19

f ’= $6x^2$ + 24x + a; f ’’= 12x + 24 = 0; x = – 2
y = 2·(– 2) + 3 = – 1; la tangente y la función se cortan en (– 2, – 1)
La función pasa por (– 2, – 1); f(– 2) = – 1 ; – 1 = – 16 + 48 – 2ax + b
Recta tangente en (– 2, – 1) es y = 2x + 3 → f ’(– 2) = m → f ’(– 2) = 2; 24 – 48 + a = 2

a = 26, b = 19

12. Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c para que g(x) tenga en el punto (1, −1) un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de g(x), en x = 0, sea paralela a la recta y = 4x.

$g'(x) = 4ax^3 + b$

Punto (1, −1) es un mínimo relativo: $\begin{cases} \text{Pasa por } (1,-1);\ g(1) = -1;\ a + b + c = -1 \\ \text{Mínimo: } g'(1) = 0;\ 4a + b = 0 \end{cases}$

La recta tangente a g(x), en x = 0, es paralela a y = 4x; g'(0) = m; g'(0) = 4; b = 4

a = – 1, b = 4 y c = – 4; $g(x) = -x^4 + 4x - 4$

13. Determina dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcula el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5. a = 8.

f'(x) = 6x – 6 = 0 → x = 1; f''(x) = 6 > 0 → en x = 1 hay un mínimo. El mínimo es el punto (1, 5) → f(1) = 5 → 3 – 6 + a = 5 → a = 8.

14. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = a\,\text{sen}\,x + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto (0,4) y que la segunda derivada de f es f''(x) = 3.senx – 10 .

$f(x) = a\,\text{sen}\,x + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = a.\cos x + 2bx + c \rightarrow \begin{cases} f''(x) = -\ a.\text{senx} + 2b \\ f''(x) = 3.\text{senx} - 10 \end{cases} \rightarrow\rightarrow$

$a = -3$ y $b = -5$

Tiene tangente horizontal en (0, 4)

$\begin{cases} \text{pasa por } (0{,}4) \rightarrow f(0) = 4 \rightarrow 4 = d \\ \underbrace{\text{tangente horizontal}}_{m=0} \rightarrow f'(0) = m = 0 \rightarrow a + c = 0 \rightarrow c = 3 \end{cases}$

15. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación y = – 3x + 3

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \rightarrow f'(x) = 3.a.x^2 + 2.b.x + c \rightarrow f''(x) = 6.a.x + 2.b$

Tiene un punto de inflexión en (1, 0):

$\begin{cases} \text{pasa por } (1{,}0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow 0 = a + b + c \\ \text{punto de inflexión} \rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 0 = 6a + 2b \end{cases}$

La recta tangente en ese punto tiene por ecuación $\underbrace{y = -\ 3x + 3}_{m=-3}$:

f'(1) = m = – 3 → – 3 = 3a + 2b +c

Resolviendo el sistema. $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 6 \end{cases}$