SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

APLICACIÓN DE LA DERIVADA. OPTIMIZACIÓN.

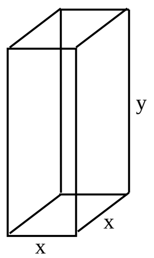
Para realizar un ejercicio de optimización seguiremos el siguiente guión:

1. **Función a optimizar. ¿Qué debe ser máximo o mínimo?**
2. **Relación entre variables**
3. **Sustituyo 2 en 1**
4. **Derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.**
5. **Comprobamos.**

1. U.I.B. 2018 (1). Calcular las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrada de volumen 64 m^3 de superficie mínima. Compruebe que la solución obtenida es un mínimo.

VER VIDEO https://youtu.be/vl0ZTGnlU7c

1. Función a optimizar. $S = 2x^2 + 4xy$



2. Relación entre variables: $V = x^2y = 64$; $y = 64/x^2$
3. Sustituir 2 en 1.

$$S = 2x^2 + 4x\frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$$

4. Derivar, igualar a cero y resolver.

$$S' = 4x - \frac{256}{x^2} = 0 \to x^3 = 64 \to x = 4 \to y = \frac{64}{4^2} = 4$$

5. Comprobar.

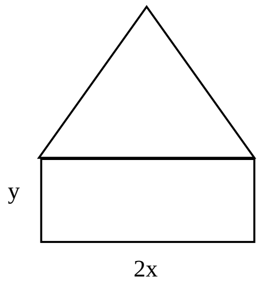
S'(3) < 0 → decrece	4	S'(5) >0 → crece

Se confirma un mínimo de superficie.

2

2. U.I.B. 2018 (2). Hemos de diseñar una ventana en forma de polígono ACEDB, de 30 m. de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcular las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.

VER VIDEO https://youtu.be/g1v-t23aQhw



1. Función a optimizar:

$$h_{\text{triángulo}} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x \rightarrow A = 2xy + \frac{1}{2}2\sqrt{3}x^2 = 2xy + \sqrt{3}x^2$$

2. Relación entre variables.

Per. = 30 → 30 = 2x + y + 2x + 2x + y = 6x + 2y → 15 = 3x + y → y = 15 – 3x

3. Sustituir 2 en 1

$$A = 2x(15 - 3x) + \sqrt{3}x^2 = 30x - 6x^2 + \sqrt{3}x^2$$

4. Derivo, igualo a cero y resuelvo la ecuación resultante.

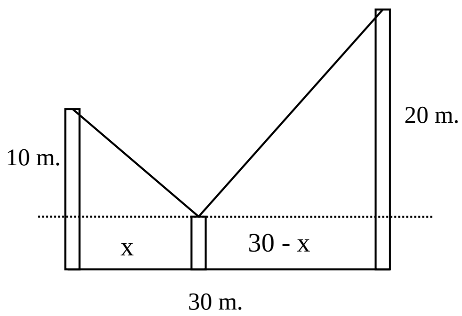
$$A' = 30 - 12x + 2\sqrt{3}x = 0 \rightarrow x = \frac{30}{12 - 2\sqrt{3}} \rightarrow \text{Base} = 2x = 7{,}029 \rightarrow y = 4{,}46$$

5. Comprobar

f'(3) > 0 → crece	3,51	f'(4) < 0 → decrece

3. U.I.B 2017(1). Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres tenemos que poner otra torreta de 5 metros de altura y tenemos que extender un cable que una los extremos de la parte de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de la parte de arriba de esta con la segunda torre. ¿Dónde tenemos que situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? ¿cuánto vale la longitud del cable en este caso?

VER VIDEO https://youtu.be/bsy05okmFGE



1. Función a optimizar.

$L = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{400 + (30 - x)^2}$

2. Derivo, igualo a cero y resuelvo.

$$L' = \frac{2x}{2\sqrt{100 + x^2} +} + \frac{-2(30 - x)}{2\sqrt{400 + (30 - x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{100 + x^2} +} + \frac{-(30 - x)}{\sqrt{400 + (30 - x)^2}} = 0$$

Resolviendo obtenemos x = 10 m.

3. Comprobar.

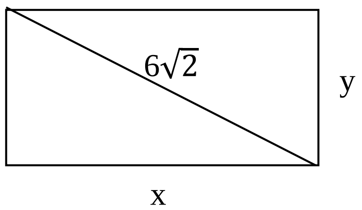
$f'(9) < 0 \to$ decrece	10	$f'(11) > 0 \to$ crece

Confirma un mínimo.

La longitud del cable será L(10) = 42,43 m.

4. U.I.B. 2016. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, determinar el rectángulo de perímetro máximo.

VER VIDEO. https://youtu.be/IQfuUZ6nr5U



1. Función a optimizar: $P = 2x + 2y$
2. Relación entre variables: $x^2 + y^2 = (6\sqrt{2})^2 \to x = \sqrt{72 - y^2}$
3. Sustituir 2 en 1 $P = 2\sqrt{72 - y^2} + 2y$
4. Derivar, igualar a cero y resolver.

$$P' = \cancel{2}\frac{-2y}{\cancel{2}\sqrt{72 - y^2}} + 2 = 0 \to y = 6 \to x = 6$$

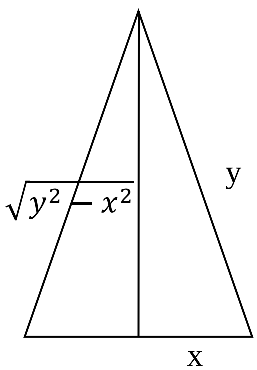
5. Comprobar.

P'(5)>0	6	P'(7)<0

Se confirma un máximo del perímetro.

5. U.I.B. 2016. Dar el triángulo isósceles de perímetro 9 cm. que tiene área máxima.

VER VIDEO. https://youtu.be/Lc_7MzITMTY



1. Función a optimizar: $A = \frac{2x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}}{2} = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$

2. Relación entre variables. $2x + 2y = 9 \rightarrow y = 4{,}5 - x$

3. Sustituir 2 en 1.

$A = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2} = x \cdot \sqrt{(4{,}5 - x)^2 - x^2} = \sqrt{20{,}25x^2 - 9x^3}$

4. Derivo, igualo a cero y resuelvo.

$$A' = \frac{40{,}5x - 27x^2}{2\sqrt{20{,}25x^2 - 9x^3}} = 0 \rightarrow 40{,}5x - 27x^2 = 0 \rightarrow x = 1{,}5 \rightarrow \text{base} = 3 \rightarrow y = 3$$

5. Comprobar.

A’(1,4) > 0 CRECE	1,5 CONFIRMA MÁXIMO	A’ (1,6) < 0 DECRECE

Se trata de un triángulo equilátero.

6. Se quiere construir una caja rectangular sin tapa en la parte superior y de base cuadrada con 108 dm^2 de material. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

VER VIDEO https://youtu.be/yzUFDywmaD8

1. Función a optimizar: volumen máximo, $f(x,y) = x^2.y$
2. Relación entre variables: superficie igual 108, $x^2 + 4xy = 108$,

$$y = \frac{108 - x^2}{4x}$$

$$3.\ f(y) = x^2.\frac{108 - x^2}{4x} = \frac{1}{4}(108x - x^3)$$

4. Derivamos, igualamos a cero y resolvemos.

$$f'(x) = \frac{1}{4}(108 - 3x^2) = 0 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow \text{tomamos } x = 6 \rightarrow y = \frac{108 - x^2}{4x} = 3$$

5. Comprobamos.

$f'(5) > 0 \rightarrow$ crece	6	$f'(6) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma la existencia de un máximo del volumen para x = 6 e y = 3.

7. U.I.B. 2015. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ determinar el valor de c qué verifica que la pendiente de la recta tangente de f(x) en x = c es mínima.

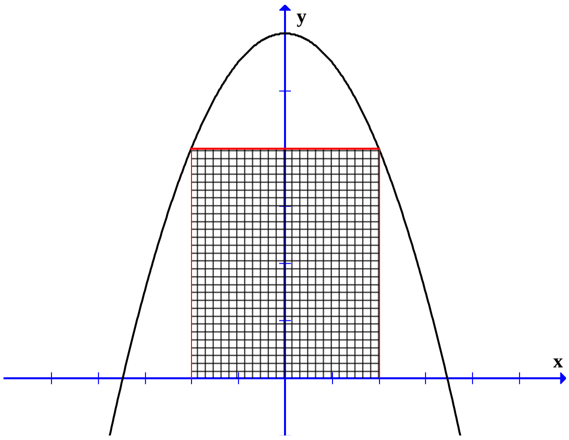
VER VIDEO https://youtu.be/eFBKqpc2aNA

La pendiente en x = c es m = f ’(c)

Para que la pendiente sea mínima se debe cumplir m’ = 0, es decir, f ” (x) = 0

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, y $m' = f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow m''(1) = 6 > 0$ confirma un mínimo.

8. Calcula el rectángulo de área máxima que tiene la base situada en el eje de abscisas, y los otros dos vértices con coordenada positiva situados en la parábola $y = 12 - x^2$.



1. Función a optimizar: A = 2x.y
2. Relación entre variables: $y = 12 - x^2$
3. Sustituyo **2** en **1**: $A = 2x.(12 - x^2) = 24x - 2x^3$
4. Derivo, igualo a cero y resuelvo la ecuación: $A' = 24 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow$ $y = 12 - 2^2 = 8$. Un rectángulo de base 4 y altura 8.
5. Compruebo: Estudio el signo de A'

A'(1'9) > 0 → crece	2	A'(2'1) < 0 → decrece

Confirma un rectángulo de área máxima para x = 2.

9. De todos los rectángulos de perímetro 48 calcular las dimensiones del que tenga la diagonal más pequeña.

1. Función a optimizar: diagonal mínima, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. Relación entre variables: perímetro 48 m. $2x + 2y = 48 \rightarrow x + y = 24 \rightarrow$ $x = 24 - y$

3. $f(y) = \sqrt{(24 - y)^2 + y^2} = \sqrt{576 - 48y + 2y^2}$

4. Derivamos, igualamos a cero y resolvemos.

$$f'(x) = \frac{-48 + 4y}{2\sqrt{576 - 48y + 2y^2}} = 0 \rightarrow -48 + 4y = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow x = 24 - 12 = 12$$

5. Comprobamos.

F'(11) < 0 → decrece	12	F'(13) >0 → crece

Confirma la existencia de un mínimo de la diagonal para x = 12 e y = 12.

10. Descomponer el número 123 en dos sumandos positivos de manera que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea mínimo.

1.- Función a optimizar: $f(x,y) = x.y^2$

2.- Relación entre variables: $x + y = 123 \rightarrow x = 123 - y$

3.- Función a optimizar dependiente de una variable: $f(x,y) = x.y^2 = (123 - y).y^2$

$f(x,y) = 123y^2 - y^3$

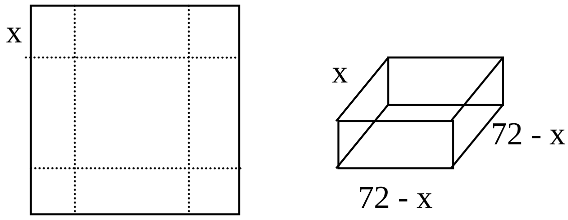
4.- Derivo igualo a cero y resuelvo la ecuación resultante. $f' = 246y - 3.y^2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{y = 0} \\ y = 82 \end{cases} \rightarrow y = 82 \rightarrow x = 41$$

5.- Comprobación. f'' = 246 –6y→ f''(82)<0, se confirma un máximo.

11. Se quiere construir una caja abierta (sin tapa) recortando cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una hoja de cartón cuadrada de 72 cm. de lado. ¿Calcula la longitud del lado del cuadrado que se ha de recortar para obtener una caja de volumen máximo?

VER VIDEO https://youtu.be/Zch7p4VDcb4



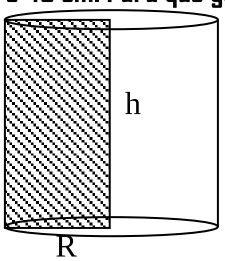
1.- Función a optimizar. (¿Qué debe ser máximo?) $V = x.(72 - x)^2$.

2.- Derivo, igualo a cero y resuelvo. $V = 5184x - 144x^2 + x^3$.

$V' = 5184 - 288x + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 72$ y $x = 24 \rightarrow$ tomamos $x = 24$.

3.- Comprobamos. $V'' = -288 + 6x \rightarrow V''(24) < 0 \rightarrow$ máximo.

12. Si hacemos girar un rectángulo sobre uno de sus lados generamos un cilindro. Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 40 cm. Para que genere un cilindro de volumen máximo.



1.- Función a optimizar: $V = \pi.R^2.h$

2.- Relación entre variables: $2h + 2R = 40 \rightarrow h = 20 - R$

3.- $V = \pi.R^2.(20 - R) = 20.\pi.R^2 - \pi.R^3$

4.- $V' = 40.\pi.R - 3.\pi.R^2 = 0 \rightarrow R = \frac{40}{3}$ cm. $\rightarrow h = 20 - R = \frac{20}{3}$ cm.

5.-

$V'(13) > 0 \rightarrow$ crece	40/3	$V'(14) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma la existencia de un máximo del volumen para R = 40/3 y h = 20/3.

13. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.

1.- Función a optimizar: $A = b.h$

2.- Relación entre variables: $b + h = 15 \rightarrow b = 15 - h$

3.- $A = (15 - h).h = 15.h - h^2$

4.- $A' = 15 - 2h = 0 \rightarrow h = 7'5$ cm. $\rightarrow b = 7'5$ cm.

5.-

$A'(7) > 0 \rightarrow$ crece	40/3	$V'(8) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma la existencia de un máximo del área para h = 7'5 cm. y b = 7'5 cm.

14. Hallar las dimensiones (altura h y radio de la base, r) de un cono recto de volumen máximo, sabiendo que la altura más el radio de la base vale 12 m.

1.- Función a optimizar: $V = 1/3\ \pi.R^2.h$
2.- Relación entre variables: $b + h = 15 \rightarrow b = 15 - h$
3.- $A = (15 - h).h = 15.h - h^2$
4.- $A' = 15 - 2h = 0 \rightarrow h = 7'5$ cm. $\rightarrow b = 7'5$ cm.
5.-

$A'(7) > 0 \rightarrow$ crece	40/3	$V'(8) <0 \rightarrow$ decrece

Confirma la existencia de un máximo del área para h = 7'5 cm. y b = 7'5 cm.

15. Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.

1.- Función a optimizar: $S = x^2 + 4.x.y$
2.- Relación entre variables: $V = x^2.y = 13'5 \rightarrow y = 13'5/x^2$
3.- $S = x^2 + \frac{4.x.13'5}{x^2} = x^2 + \frac{4.13'5}{x}$
4.- $S' = 2x - \frac{54}{x^2} = 0 \rightarrow x = 3\text{ m.} \rightarrow y = 1'5\text{ m.}$
5.-

$S'(2) < 0 \rightarrow$ decrece	3	$S'(4) >0 \rightarrow$ crece

Confirma la existencia de un mínimo del gasto en chapa para x = 3 m. e y = 1'5 m.

16. Un alambre de 100 cm. de longitud, se corta en dos partes formando con una de ellas un círculo y con la otra un cuadrado. Cómo debe ser cortado el alambre para que:
a. La suma de las áreas de las dos figuras sea máxima.
b. La suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

1.- Función a optimizar: $S = \pi x^2 + y^2$
2.- Relación entre variables: $2.\pi.x + 4y = 100 \rightarrow \pi.x + y = 50 \rightarrow y = 50 - \pi x$
3.- $S = \pi x^2 + (50 - \pi x)^2 = \pi.x^2 + 2500 - 100.\pi.x + \pi^2 \cdot x^2$
4.- $S' = 2.\pi.x - 100.\pi + 2.\pi^2.x = 0 \rightarrow x = \frac{100\pi}{2.\pi.(1+\pi)} = \frac{100}{2.(1+\pi)} \approx 12'07\text{cm.} = y$
5.-

$S'(12) < 0 \rightarrow$ decrece	12'07	$S'(13) >0 \rightarrow$ crece

Confirma la existencia de un mínimo de la suma de áreas. para x = 12'07 cm. = y
La función S solo presenta un extremo (mínimo). Para hallar las dimensiones que hacen máxima la suma de áreas tendríamos que tomar la función en los extremos de su dominio. Que solo haya círculo o que solo haya cuadrado.

Solo círculo sería: $2.\pi.x = 100 \rightarrow x = 15'92$ cm. → Área = 795.77 cm^2
Solo cuadrado sería: $4.y = 100 \rightarrow y = 25$ cm. → Área = $25^2 = 625$ cm^2.
El área máxima sería tomar todo el alambre parta hacer un círculo.

17. El propietario de un inmueble tiene alquilados los cuarenta pisos del mismo a 1.000 € al mes cada uno. Por cada 100 € de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficio produce al propietario?

Número de pisos	alquiler	total
40	1000	40000
39	1100	42900
38	1200	45600
…	…	…
40 – x	1000 + 100x	(40 – x).(1000 + 100x)

1.- Función a optimizar: $B = (40 - x).(1000 + 100x) \rightarrow$
$\rightarrow B = 40000 + 3000.x - 100x^2$
4.- $B' = 3000 - 200.x = 0 \rightarrow x = 15$.
5.-

$B'(14) > 0 \rightarrow$ crece	15	$B'(16) < 0 \rightarrow$ decrece

Confirma un máximo en el beneficio para x = 15. Sube el alquiler hasta 2500€, tendrá 25 inquilinos y unos ingresos de 62500€.

18. Una piedra preciosa pesa 12 gramos. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es de 1440 €, calcula, cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos cuando la depreciación sea máxima.

1.- Función a optimizar: $f = k.x^2 + k.(12 - x)^2$ F es el valor de la piedra una vez partida. Si buscamos el mínimo de f tendremos la máxima depreciación.
4.- $f' = 2.k.x + 2.k.(12 - x) = 0 \rightarrow x = 6$
5.-

$f'(5) < 0 \rightarrow$ decrece	6	$f'(7) > 0 \rightarrow$ crece

Confirma un mínimo de f (valor de la piedra partida), es decir, un máximo de depreciación.

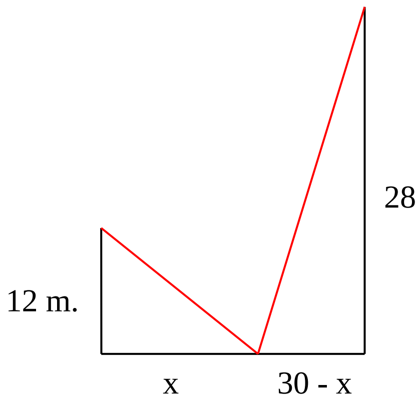
19. ¿Qué puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ están más cerca del punto Q = (0,2)?

Sea P = (x, y) un punto cualquiera de la gráfica. La distancia de P a Q es $|\overrightarrow{QP}|$
1.- Función a optimizar: $d = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$
2.- Relación entre variables: $y = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 - y$
3.- $d = \sqrt{4 - y + (y-2)^2} = \sqrt{y^2 - 5y + 8}$
4.- $d' = \frac{2y-5}{2\sqrt{y^2-5y+8}} = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
5.-

$d'(2) < 0 \rightarrow$ decrece	5/2	$d'(3) > 0 \rightarrow$ crece

Confirma que los puntos P = $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ y P = $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ están a distancia mínima de Q.

20. Dos postes de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros entre sí. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En qué punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?



1.- Función a optimizar: l = $\sqrt{x^2+144} + \sqrt{(30-x)^2+784}$

4.- l' = $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + \frac{-2.(30-x)}{2\sqrt{(30-x)^2+784}} = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+144}}\right)^2 = \left(\frac{(30-x)}{\sqrt{(30-x)^2+784}}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x = 21 \\ x = 52'5 \text{ no es válida.} \end{cases}$

5.-

d'(20) < 0 → decrece	21	d'(22) >0 → crece

Confirma que la menor longitud del cable se da con x = 21 m. El cable medirá 53'6 m.