SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS. JULIO 2018. U.I.B.

OPCIÓN A.

1. Considerar las matrices siguientes:

$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&k\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}k&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$, **Dónde k es un parámetro real.**

a. Calcular A·B y determinar en función de los valores reales de k si la matriz A·B tiene inversa.

b. Estudia lo mismo que en el apartado a pero con la matriz B·A.

c. Para k = - 2, calcula la inversa de B·A

VER VÍDEO https://youtu.be/pVWsxXDOiSQ

a.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\2&k\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0&-1\\3k&k&2k-2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}k&0&-1\\3k&k&2k-2\\1&1&2\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Para todo k la matriz } A\cdot B \text{ no tiene inversa.}$$

b.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}k&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&-1\\3&k+2\end{pmatrix}$$

$$|B\cdot A|=\begin{vmatrix}k&-1\\3&k+2\end{vmatrix}=k^2+2k+3=0\rightarrow \text{No tiene solución real}\rightarrow$$

$\rightarrow B\cdot A$ Para todo k la matriz A si tiene inversa.

c.

$$(B\cdot A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}\\-1&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$$

2. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros), viene dada por

$$\mathbf{B(x)} = \begin{cases} \mathbf{5x + 15}, & \mathbf{si\ 0 \le x \le 3} \\ \mathbf{-(x-3)^2 + 30} & \mathbf{si\ 3 < x \le 8} \end{cases}$$

a. ¿Es continua esta función, es derivable? Represéntala gráficamente.

b. ¿Cuándo crece y cuando decrece la función beneficio?

c. ¿Cuándo se obtienen los beneficios mínimo y máximo?

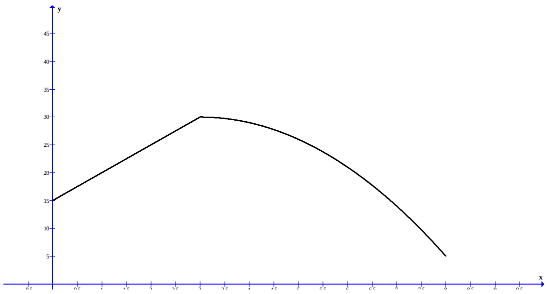
d. Representa la función derivada.

VER VÍDEO https://youtu.be/nRVqZ9Mn0dM

a. Las funciones polinómicas son continuas en R. Debemos estudiar la continuidad en x = 3

$$\left. \begin{cases} B(3) = 30 \\ \lim_{x\to 3} B(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} 5x + 15 = 30 \\ \lim_{x\to 3^+} -(x-3)^2 + 30 = 30 \end{cases} \end{cases} \right\} \to B(3) = \lim_{x\to 3} B(x) \to$$

B(x)es continua en x = 3



Viendo la gráfica podemos definir los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. La función tiene un punto anguloso en x = 3, lo que implica que no es derivable en dicho punto.

3. Un dado se carga de manera que la probabilidad de obtener un 6 es de 1/2 y las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a P. Se lanza el dado, calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a. Se obtiene un dos.

b. No se obtiene ningún tres.

c. Se obtiene un número par.

d. Se obtiene un número impar.

VER VÍDEO https://youtu.be/z7IlUFJV0I4

$$\overbrace{p + p + p + p + p}^{\text{Probabilidad de no sacar un 6}} = 0{,}5 \to p = 0{,}1$$

a. $P(2) = 0{,}1$

b. $P(\text{ningún } 3) = 1 - P(3) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c. $P(\text{par}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}7$

d. $P(\text{impar}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$

4. a. En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pilas es de 80 horas. Si α = 0,2 (nivel de significación) y en una muestra de 50 de estas pilas la duración media es de 500 horas; determinar el intervalo de confianza para la duración media poblacional.

3

b. Si la duración de este tipo de pilas sigue una normal de media 500 horas y desviación típica 80 horas. ¿Cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuese superior a 520 horas?
VER VÍDEO https://youtu.be/eI1b0WcjtwY

a.

$$\alpha = 0{,}2 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}1 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}285$$

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(500 - 1{,}285\frac{80}{\sqrt{50}}; 500 + 1{,}285\frac{80}{\sqrt{50}}\right)$$
$$= (485{,}46; 514{,}54)$$

b.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(500, \frac{80}{\sqrt{9}}\right) = N(500; 26{,}67)$$

$$P(\bar{x} \geq 520) = P\left(z \geq \frac{520 - 500}{26{,}67}\right) = P(z \geq 0{,}75) = 1 - \overbrace{P(z \leq 0{,}75)}^{0{,}7734} = 0{,}2266$$

OPCIÓN B.

1. El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 euros por persona. Los niños pagan el 50 % de este precio y los jubilados pagan el 60 % del mismo. Determinar el número de personas que no son niños ni jubilados, el nombre de niños y el nombre de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que había 200 personas, que el número de jubilados será el 25 % que el de niños y que la recaudación total fue de 5680 euros por la estancia de todos.

VER VÍDEO https://youtu.be/Z5V6vWDbb0o

$$\left.\begin{array}{r}\text{N: niños}\\ \text{J: jubilados}\\ \text{A: otros}\end{array}\right\}\begin{cases} N+J+A=200\\ J=\dfrac{25}{100}A\\ \dfrac{50}{100}N+\dfrac{60}{100}J+A=5680\end{cases}\quad\begin{cases}N+J+A=200\\ 100J-25A=0\\ 5N+6J+10A=56800\end{cases}\begin{cases}N=144\\ J=36\\ A=20\end{cases}$$

2. Considerar la función f(x,y) = x−y.

a. Representar el conjunto de puntos del plano definidos por:

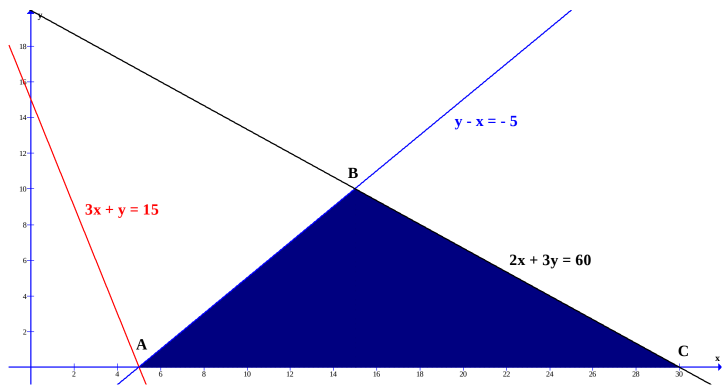
A = {(x,y) : 3x + y ≥ 15, y−x ≤−5, 2x + 3y ≤ 60, y ≥ 0} y calcular el valor máximo de f(x,y) en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que fuera el mismo conjunto?

b. Decir si la función f(x,y) alcanza un máximo en el conjunto B.

B = {(x,y) : 3x + y ≤ 15, x−y ≥ 5, x ≥ 0}

VER VÍDEO https://youtu.be/nou0RoUIw98

VER VÍDEO https://youtu.be/u5tWtJJiF4w



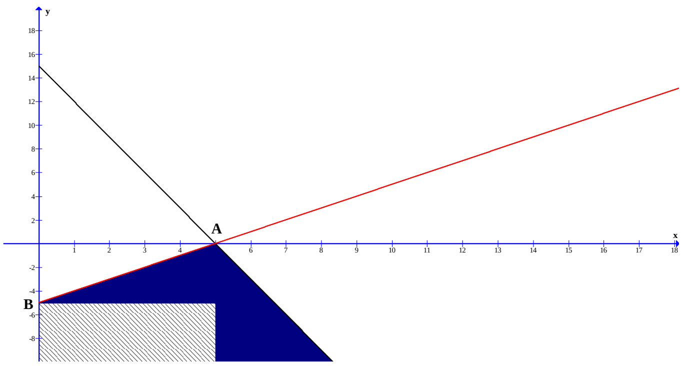
Si eliminamos $3x + y \geq 15$ no varía la región representada.

Punto A $(5, 0) \rightarrow f(A) = 5$

Punto B$\begin{cases} y-x=-5\\ 2x+3y=60\end{cases} \rightarrow B(15,10) \rightarrow f(B) = 5$

Punto C $(30, 0) \rightarrow f(C) = 30$

El valor máximo se consigue en (30, 0) y el valor máximo es 30.



Punto A $(5, 0) \rightarrow f(A) = 5$
Punto B$(0, -5) \rightarrow f(B) = 5$
Tomamos un valor cualquiera del conjunto B, y calculamos el valor de f.
$f(2, -6) = 8 > f(A)$ y $f(B) \rightarrow$ no hay máximo.

3. Calcular:

a. $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

b. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 \cdot e^{x^3} dx$

VER VÍDEO https://youtu.be/IrlUPhIEHh8

a.

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

b.

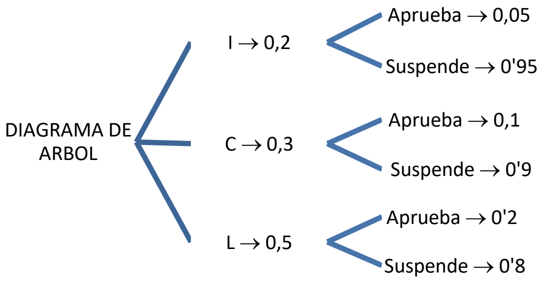
$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 \cdot e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} = \frac{1}{3}e^{\left(\sqrt[3]{\ln 3}\right)^3} - \frac{1}{3}e^{\left(\sqrt[3]{\ln 2}\right)^3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

4. En una Universidad en la cual sólo hay estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, acaban la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20 % de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30% ciencias y el 50% letras. Tomado un estudiante al azar se pregunta :

a. Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.

b. Nos afirma que ha terminado la carrera probabilidad que sea de ingeniería.

VER VÍDEO https://youtu.be/cDoqHg35K9I



a. $P(A \cap I) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01$

b.

$$P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2} = 0,0714$$