SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

SELECTIVIDAD MATEMÁTICAS APLICADAS. JUNIO 2019. U.I.B.

OPCIÓN A.

1. Considera la matriz siguiente:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-5}\\ \mathbf{4} & \mathbf{x+2} & \mathbf{x^2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

Se pregunta:

a. Resuelve la ecuación |A| = 0

b. Si x = 0, ¿tiene inversa la matriz A?

c. Si x = 2, ¿tiene inversa la matriz A? En caso afirmativo resuelve la ecuación A·Z = I

VER VÍDEO https://youtu.be/SXU-ZGXy2K4

a.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & x+2 & x^2\\ -1 & 1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & -8\\ 4 & x+6 & x^2-12\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -8\\ x+6 & x^2-12\end{vmatrix}=$$

$$-1\cdot(4x^2-48+8x+48)=0;\ 4x^2+8x=0;\ x\cdot(4x+8)=0;\ \begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases}$$

b.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix};\ |A|=0;\ \text{A no tiene inversa.}$$

c.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 4 & 4\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix};\ |A|=-32\neq 0;\ \text{A si tiene inversa.}$$

$$A\cdot Z = I;\ Z = A^{-1}\cdot I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la siguiente función: donde n indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0 horas.

$$\mathbf{N(t)} = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si } 0 \le t \le 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si } 9 < t \le 24 \end{cases}$$

a. ¿Es continua la función?

b. ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaba por el peaje y entre qué horas disminuyó?

c. ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos?, ¿Cuántos fueron?

VER VÍDEO https://youtu.be/ZQ9L7dFHw94

a. Estudiamos la continuidad.

En [0,9) es continua pues es polinómica.

En (9,24] es continua pues es polinómica.

En $t = 9$.

$$\begin{cases} N(9) = \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t\to 9} N(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 9^-} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t\to 9^+} 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = 6 \end{cases} \end{cases} \rightarrow N(9) = \lim_{t\to 9} N(t) \rightarrow \text{continua.}$$

Es continua en todo su dominio [0,24].

b. Derivamos, igualamos a cero y resolvemos.

$$N'(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right) & \text{si } 0 < t < 9 \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right) & \text{si } 9 < t < 24 \end{cases}$$

$$2\left(\frac{t-3}{3}\right) = 0 \rightarrow t = 3$$

$$-2\left(\frac{t-15}{3}\right) = 0 \rightarrow t = 15$$

t	0		3		9		15		24
N(t)	3		2		6		10		1
N'(t)		– ↘	0	+ ↗		+ ↗	0	– ↘	

Disminuyó entre las 0 y las 3 y entre las 15 y las 24 h.
Aumentó entre las 3 y las 15 h.
El mayor número de vehículos (10) se dio a las 15 h.

---

3. Tenemos un dado correcto y dos urnas con bolas descritas a continuación:
Urna I: 1 bola negra, 3 bolas rojas y 6 bolas verdes.
Urna II: 2 bolas negras, 6 bolas rojas y 2 bolas verdes.
Tiramos el dado. Si obtienes 1 o 2, ve a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, vamos a la urna II. Extraemos al azar una bola de la urna correspondiente.

a. Haz un diagrama de árbol que representa el experimento con todas las probabilidades.

b. Calcular las siguientes probabilidades:

i) p $(\{\mathbf{3,4,5,6}\}\mathbf{y}\{\mathbf{bola\ roja}\})$

ii) p $\left(\{\mathbf{bola\ verde}\}/\{\mathbf{1}\}\right)$

iii) p $\left(\{\mathbf{bola\ roja}\}/\{\mathbf{5}\}\right)$

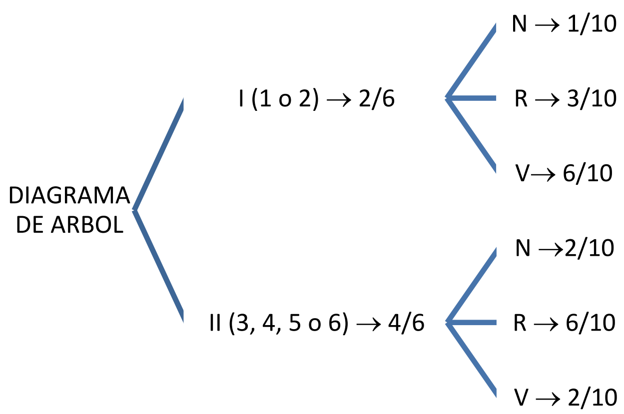
iv) p $(\{\mathbf{2}\} \cap \{\mathbf{bola\ verde}\})$

c. Calcular la probabilidad de la bola extraída haya sido roja y haya sido negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída haya sido verde? ¿Cuánto es la suma de las tres probabilidades? Justifica la respuesta.

VER VÍDEO https://youtu.be/CceRWFXmKXU

---

a.



b.

$$P(\{3,4,5,6\}y\{\text{bola roja}\}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10} = 0{,}4$$

$$P\left(\{\text{bola verde}\}/\{1\}\right) = \frac{6}{10}$$

$$P\left(\{\text{bola roja}\}/\{5\}\right) = \frac{6}{10}$$

$$P(\{2\} \cap \{\text{bola verde}\}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{10} = 0{,}1$$

c.

$$P(\{roja\}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10} = 0{,}5$$

$$P(\{negra\}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{6}$$

$$P(\{verde\}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{6}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{3}$$

Las tres probabilidades suman 1.

4. a. Los pesos de los habitantes de una ciudad tienen una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68.5 kg, y que sea menor que 68 kg?.

b. En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra es 37,1 ºC, y la desviación típica de la población, es 1,04 ºC. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. Interpreta el resultado.

VER VÍDEO https://youtu.be/hl73D8MxGIs

a.

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(67, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(67{,}0'5)$$

$$P(x > 68{,}5) = P\left(z \geq \frac{68{,}5 - 67}{0{,}5}\right) = P(z \geq 3) = 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 =$$

$$= 0{,}0013$$

$$P(x < 68) = P\left(z < \frac{68 - 67}{0{,}5}\right) = P(z < 2) = 0{,}9772$$

b.

$$I.C. = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(37'1 - 2'575 \cdot \frac{1'04}{\sqrt{64}}, 37'1 + 2'575 \cdot \frac{1'04}{\sqrt{64}}\right) =$$

$$= (36'765, 37'435)$$

Calculo de $Z_{1/2}$:

Nivel de confianza 99% → $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

OPCIÓN B.

1. U.I.B. 2019 (4). Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses de la línea A, 3 de la B i 4 de la C. El martes salieron 2 autobuses de la línea A, 1 de la B y 4 de la C. El miércoles salieron 1 autobús de la línea A, 3 a la B y 5 a la C.

a. Representar los datos en forma de matriz.

b. Tiene inversa la matriz construida en el apartado a.? En caso negativo, justifícalo. En caso positivo, calcula su inversa.

c. Si D es la matriz construida en el apartado a., resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{D}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{33}\\ -\mathbf{33}\\ -\mathbf{33}\end{pmatrix}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/iGVT9fQqDuY

a.

$$D=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

b. $|D| = 25 + 12 + 24 - (4 + 30 + 60) = -33 \neq 0$; sí tiene inversa.

c.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-33 & 3 & 4\\ -33 & 1 & 4\\ -33 & 3 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}}=-2;\ y=\frac{\begin{vmatrix}5 & -33 & 4\\ 2 & -33 & 4\\ 1 & -33 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}}=3;\ z=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3 & -33\\ 2 & 1 & -33\\ 1 & 3 & -33\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}}=-8$$

2. Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En este momento están empaquetando dos tipos de lotes diferentes: los lotes del tipo A tienen 1 queso y 2 botellas de vino y el transporte cuesta 0,9 € los lotes de tipo B tienen 3 quesos y 1 botella de vino y cuesta el transporte 1,5 €. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino y han de elaborar al menos 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo han de elaborar para que los gastos de transporte sean mínimos? Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

VER VÍDEO https://youtu.be/k57KLEP-prk

	QUESO	VINO	COSTE TRANSPORTE
LOTE A	1	2	0,9
LOTE B	3	1	1,5
	200	100	

Función a optimizar: $C(x,y) = 0{,}9x + 1{,}5y$

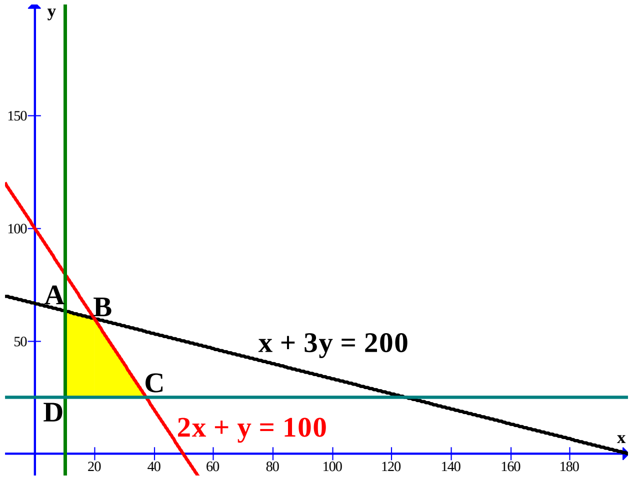
$$\text{Restricciones.}\begin{cases}x \geq 10\\ y \geq 25\\ x + 3y \leq 200\\ 2x + y \leq 100\end{cases}$$

$x+3y \leq 200$

x	y
0	200/3
200	0

$2x + y \leq 100$

x	y
0	100
50	0



$$A\begin{cases} x = 10 \\ x + 3y = 200 \end{cases} \rightarrow \left(10, \frac{190}{3}\right) \rightarrow f(A) = 104\ €$$

$$B\begin{cases} 2x + y = 100 \\ x + 3y = 200 \end{cases} \rightarrow (20,60) \rightarrow f(B) = 108\ €$$

$$C\begin{cases} y = 25 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{75}{2}, 25\right) \rightarrow f(C) = 71{,}25\ €$$

$$D\begin{cases} x = 10 \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow (10,25) \rightarrow f(D) = 46{,}5\ €$$

Elaboramos 10 lotes tipo A y 25 lotes tipo B para un coste mínimo de 46,5 €

3. El número de visitantes de un museo viene expresado mediante la siguiente función donde t es la hora desde la apertura del museo. Suponemos que la hora de apertura del museo son las 9:00 de la mañana.

$$\mathbf{V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}}$$

a. ¿Cuándo crece y decrece el número de visitantes del museo?
b. ¿Cuándo recibe el museo el mayor número de visitantes? ¿Cuál es este número?
c. ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de la función V(t)?

VER VÍDEO https://youtu.be/kKnm6PlgnXQ

a y b.

$$V'(t) = \frac{300 \cdot (t^3 + 2) - 300t \cdot 3t^2}{(t^3 + 2)^2} = \frac{600 - 600t^3}{t^3 + 2} = 0 \rightarrow t = 1$$

0		1		CIERRE
V(t)	+	100	–	
V'(t)	↗	0	↘	

El número de visitantes crece durante la primera hora y decrece a continuación. Recibe un máximo de 100 visitantes la primera hora.

c.

$$V''(t) = \frac{1800t^5 - 7200t^2}{(t^3+2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt[3]{4} \end{cases} \text{Punto de inflexión para } t = \sqrt[3]{4}$$

4. Tenemos dos urnas descritas a continuación :
Urna I: 2 bolas negras, 1 bola roja y 3 bolas verdes.
Urna II: 1 bola negra, 2 bolas rojas y 1 bola verde.
El experimento consiste en extraer una bola al azar de la urna 1, introducirla en la urna dos y finalmente extraer una bola al azar de la urna 2.

a. Hacer un diagrama de árbol que represente el experimento con las probabilidades asociadas.

b. Calcula la probabilidad de que la 2ª bola extraída sea:

i. Roja.

ii. Negra.

iii. Verde.

c. Sabiendo que la 2ª bola ha sido negra ¿cuál es la probabilidad de que la 1ª también sea negra?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la 1ª bola sea roja siendo roja la 2ª?

VER VÍDEO https://youtu.be/Zwu79T3cJZo

DIAGRAMA DE ÁRBOL

- NEGRA $\rightarrow$ 2/6
  - NEGRA $\rightarrow$ 2/5
  - ROJA $\rightarrow$ 2/5
  - VERDE $\rightarrow$ 1/5
- ROJA $\rightarrow$ 1/6
  - NEGRA $\rightarrow$ 1/5
  - ROJA $\rightarrow$ 3/5
  - VERDE $\rightarrow$ 1/5
- VERDE $\rightarrow$ 3/6
  - NEGRA $\rightarrow$ 1/5
  - ROJA $\rightarrow$ 2/5
  - VERDE $\rightarrow$ 2/5

b.

$$P(\text{negra}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$
$$P(\text{roja}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{13}{30}$$
$$P(\text{verde}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

c.

$$P\left({}^{N_1}/_{N_2}\right) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{2}$$

d.

$$P\left({}^{R_1}/_{R_2}\right) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}$$