SI ENCUENTRAS ALGÚN ERROR COMUNÍCALO, POR FAVOR, AL CORREO DE LA PÁGINA WEB.

INTEGRALES DEFINIDAS. CÁLCULO DE ÁREAS

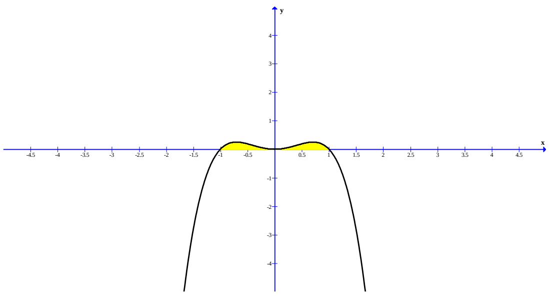
Área limitada por una función y el eje x.

1. U.I.B. 2019 (1). Consideramos la región delimitada por la función F(X) = $x^2 - x^4$ y el eje de abscisas. Haz un dibujo aproximado de dicha región y calcula su área.
VER VÍDEO https://youtu.be/Utv4kwqIpNo

1. Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje x.

$$x^2 - x^4 = 0;\ x^2\cdot(1 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Realizamos un boceto del área que queremos calcular.



3. Calculamos el área

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(\frac{-1}{3} - \frac{-1}{5}\right) = \frac{4}{15}\ u^2$$

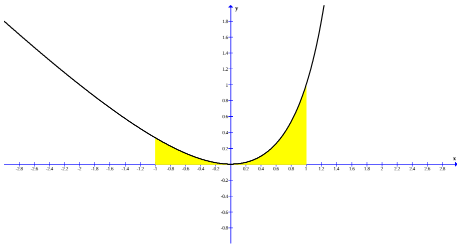
2. Consideremos la función f(x) = $\frac{x^2}{2-x}$. Hacer un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo [- 1, 1]. Calcular el área limitada per la gráfica de la función anterior y el eje X.
VER VÍDEO https://youtu.be/YjPmDF-6exQ

1. Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje x

$$\frac{x^2}{2-x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

2. Realizamos un boceto del área que queremos calcular.

x	Y
- 1	1/3
- 0,5	1/10
0	0
0,5	1/6
1	1



3. Calculamos el área

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2-x}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(-x - 2 + \frac{4}{2-x}\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x - 4\ln(2-x)\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 4\ln 3 - 4 \text{ u}^2$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2 - x \\ \hline \underline{-x^2 + 2x} & -x - 2 \\ \;/ \quad 2x & \\ \quad \underline{-2x + 4} & \\ \qquad / \quad 4 & \end{array}$$

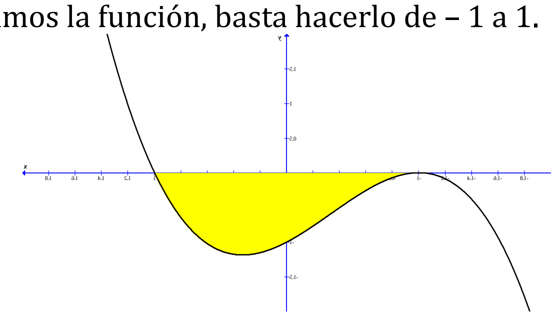
3. Dibuja el recinto limitado por la curva $y = x^3 + x^2 - x - 1$ y el eje X. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/zJwaDSQqCf0

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Representamos la función, basta hacerlo de – 1 a 1.



3. Calculamos el área.

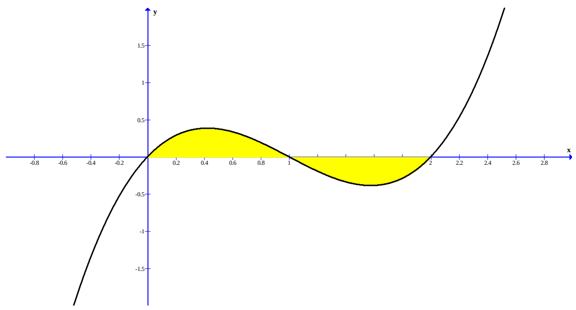
$$\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = \frac{-4}{3} \rightarrow \text{Área} = \frac{4}{3}\text{u}^2.$$

4. Dibuja el recinto limitado por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ y el eje X. Calcula el área.
VER VÍDEO https://youtu.be/CQBuQsaEXcs

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

2. Representamos la función, basta hacerlo de – 1 a 1.



3. Calculamos el área.

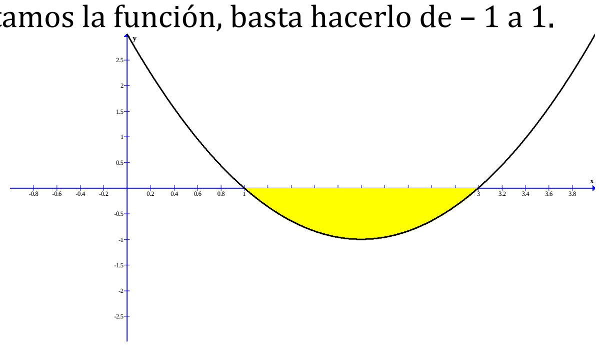
$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \\ \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^2 = \frac{-1}{4} \end{aligned}\right\} \text{Área} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,u^2.$$

5. Dibuja el recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x + 3$ y el eje X. Calcula el área.
VER VÍDEO https://youtu.be/94oTUxlLX18

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

2. Representamos la función, basta hacerlo de – 1 a 1.



3. Calculamos el área.

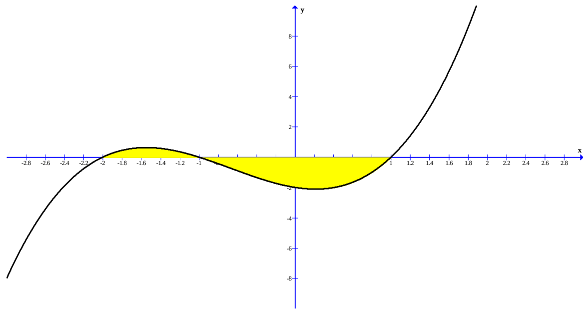
$$\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = \frac{-4}{3} \rightarrow \text{Área} = \frac{4}{3}u^2.$$

6. Dibuja el recinto limitado por la curva $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ y el eje X. Calcula el área.
VER VÍDEO https://youtu.be/vH2v_Ju3QeM

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

2. Representamos la función, basta hacerlo de – 2 a 1.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1} = \frac{5}{12}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1} = \frac{-8}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2.$$

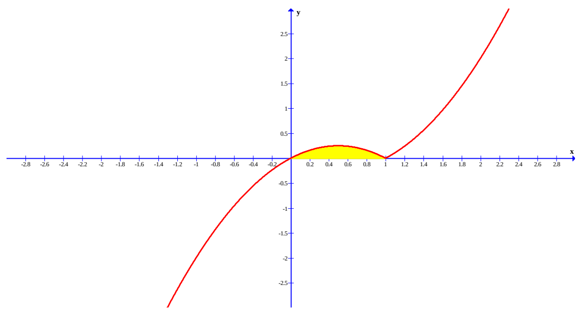
7. U.I.B. 2017 (I). Dibuja la región limitada por la función $f(x) = x \cdot |x - 1|$ y el eje X.

VER VÍDEO https://youtu.be/liLAdQd2SJg

$$f(x) = x \cdot |x - 1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

2. Representamos la función, basta hacerlo de 0 a 1.



3. Calculamos el área.

$$\int_{0}^{1} (-x^2 + x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\ u^2$$

Área limitada por una función, el eje x y una o dos rectas verticales.

8. U.I.B. 2019 (2). Consideremos la región limitada por la función f(x) el eje de abscisas o eje x y las rectas verticales x = - 1 y x = 1. Haz un dibujo aproximado de la región pedida y calcula el área de dicha región.

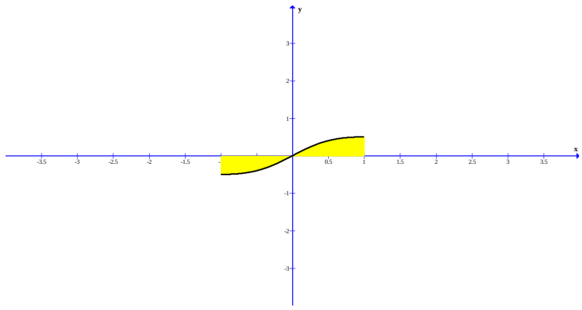
$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{1+x^2}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/6PMCx5YgHR4

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\frac{x}{1+x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

2. Representamos la función, basta hacerlo de 0 a 1.



3. Calculamos el área.

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_{-1}^{0} = -0{,}347$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_{0}^{1} = 0{,}347$$

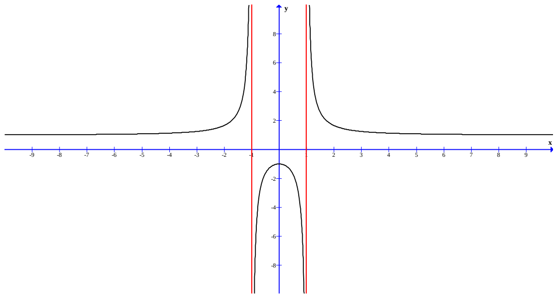
El área $= 0{,}347 + 0{,}347 = 0{,}694\ u^2$

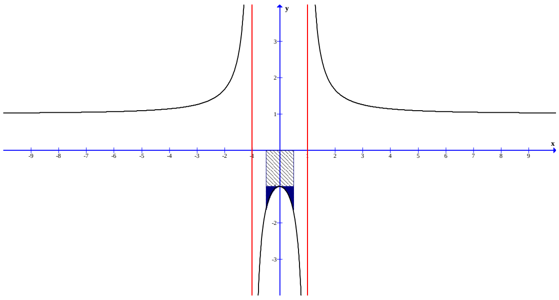
9. U.I.B. 2018. Considerar la función f(x) = $\frac{x^2+1}{x^2-1}$. Hacer un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo [- 1; 1]. Calcular el área limitada per la gráfica de la función anterior, el eje X y las rectas verticales x = ½ y x = - ½.

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 0 \rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

2. Representamos la función.





3. Calculamos el área.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int \left(1+2\frac{1}{x^2-1}\right)dx = x+2\int \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)dx =$$
$$= x+2\left(\frac{-1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx\right) = x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+c$$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & x^2-1 \\ \hline -x^2 & +1 & 1 \\ / & +2 & \end{array}$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \rightarrow A(x-1)+B(x+1)=1 \begin{cases} A=\frac{-1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

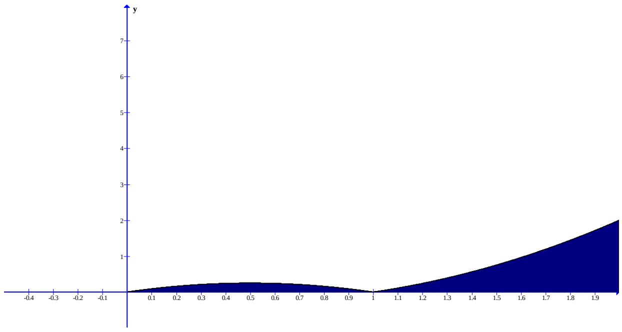
$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = -1{,}2 \rightarrow \text{Área} = 1{,}2\ u^2$$

10. U.I.B. 2017. Consideremos la función f(x) = x·|x−1|. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo [0,2]. Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X.
VER VÍDEO https://youtu.be/GEGrNUUuVXQ

$$f(x) = x\cdot|x-1| = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x<1 \\ x^2-x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes. $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 -(x^2 - x)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}u^2 \\ \displaystyle\int_1^2 (x^2 - x)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}u^2 \end{cases} \rightarrow \text{Área total} = 1\ u^2$$

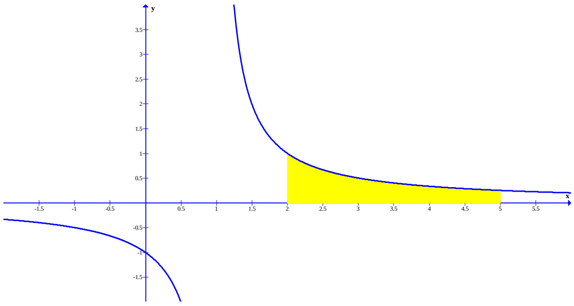
11. Dibuja el recinto limitado por $y = \frac{1}{x-1}$, el eje X y las rectas x = 2 y x = 5. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/m054uXY4pWU

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\frac{1}{x-1} = 0 \rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\int_2^5 \frac{1}{x-1}dx = [\ln|x-1|]_2^5 = \ln 4 = 1{,}39\ u^2$$

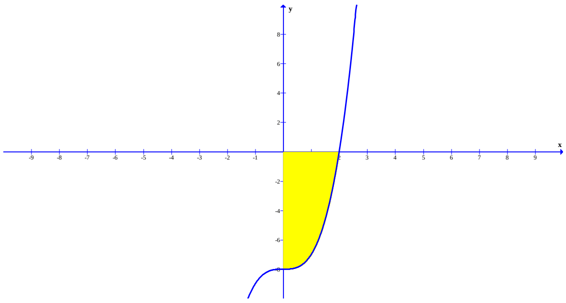
12. Dibuja el recinto limitado por la función y = x³ – 8 y los ejes de coordenadas.

VER VÍDEO https://youtu.be/ejnLw7hN0S4

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$x^3 - 8 = 0;\ x^3 = 8;\ x = 2$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\int_0^2 (x^3-8)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 8x\right]_0^2 = -12 \to \text{Área} = 12\ u^2$$

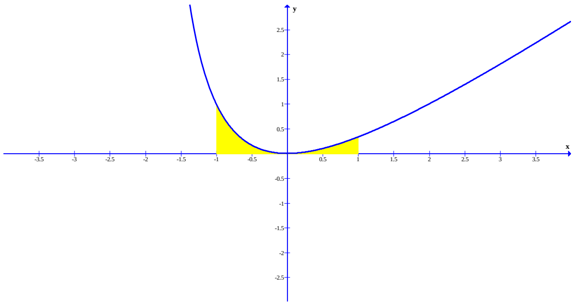
13. Dibujar la región limitada por la función f(x), el eje X y las rectas x = – 1 y x = 1. Calcular el área de dicha región. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

VER VÍDEO https://youtu.be/fj-V8XnLaYY

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\frac{x^2}{x+2} = 0;\ x = 0.$$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\int \frac{x^2}{x+2}dx \overset{*}{=} \int \left(x - 2 - \frac{4}{x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 4\ln|x+2| + c$$

$$*)\ \int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \left(\overbrace{c(x)}^{\text{cociente}} + \frac{\overbrace{r(x)}^{\text{resto}}}{\underbrace{q(x)}_{\text{divisor}}} \right)dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+2 \\ \hline \text{-}\ x^2\ \text{-}2x & x-2 \\ /\quad \text{-}2x & \\ \quad\ 2x+4 & \\ \quad\ /\quad +4 & \end{array}$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x+2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x - 4\ln|x+2|\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - 2 - 4.\ln 3 - \left(\frac{1}{2} + 2 - 4.\ln 1\right) =$$

$$= -4 + 4.\ln 3\ u^2 \approx 0'394\ u^2.$$

14. Dibuja el recinto comprendido entre la función f(x), el eje X y las rectas x = 0 y x = 1. Calcula el área de este recinto.

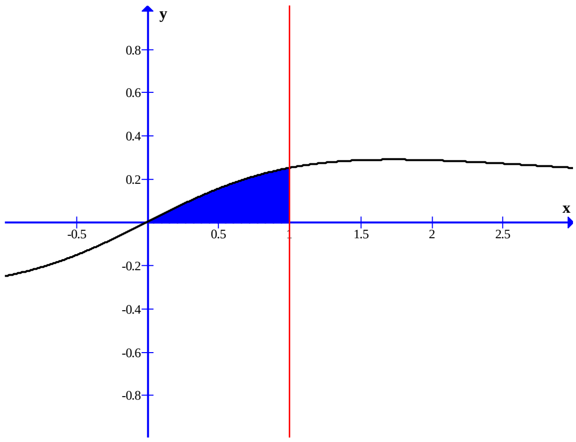
$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{x^2+3}}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/vBfhk7iK6IA

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$\frac{x}{x^2+3} = 0; x = 0$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área } = \int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}\,dx = [\ln|x^2+3|]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 \text{ u}^2$$

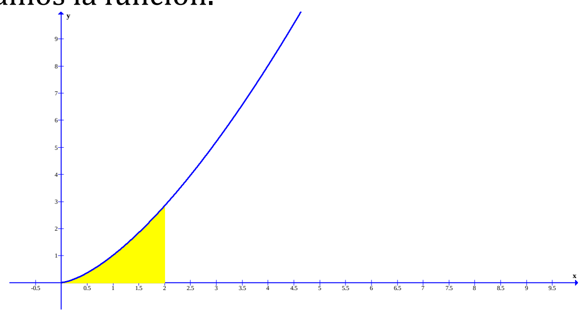
15. Dibujar la región limitada por la función f(x) =x$\sqrt{x}$, el eje X y la recta x = 2. Calcular el área de dicha región.

VER VÍDEO https://youtu.be/EDOj1AhHi_8

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$x \cdot \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

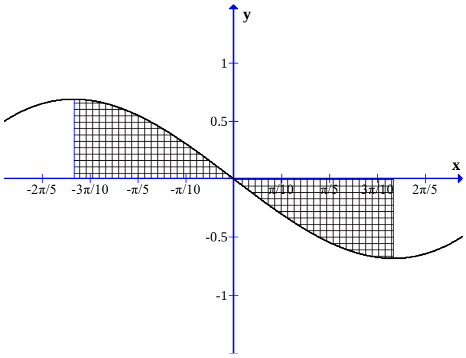
$$\int_0^2 x\cdot\sqrt{x}\,dx=\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{5}u^2$$

16. Calcular el área del recinto limitado por la curva y = x – 2sin x y las rectas y = 0, x = –π/3, x = π/3. Haz un dibujo aproximado del recinto.

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes en el intervalo dado.

$x - 2senx = 0.\ x = 0$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(x-2senx)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2cosx\right]_{\frac{-\pi}{3}}^{0}=0+2cos0-\left(\frac{\left(\frac{-\pi}{3}\right)^2}{2}+2cos\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\pi^2}{18}$$

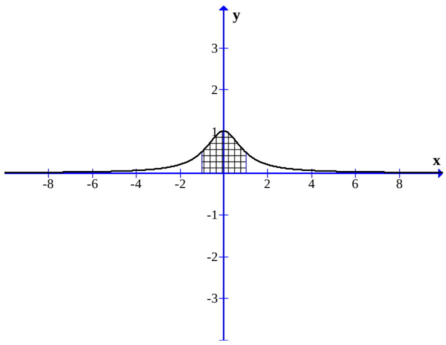
$$\text{Área}=2.\left(1-\frac{\pi^2}{18}\right)=2-\frac{\pi^2}{9}u^2$$

17. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ y las rectas y = 0 , x = -1 , x = 1. Haz un dibujo aproximado del recinto.

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes en el intervalo dado.

$$\frac{1}{1+x^2}=0;\ \nexists\ \text{sol.}$$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}u^2$$

18. Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ i les rectes y = 0, x = a, x = b, donde a y b son las abscisas de los puntos de inflexión de la curva. Haz un dibujo de la región.

Para hallar los puntos de inflexión hacemos la segunda derivada.

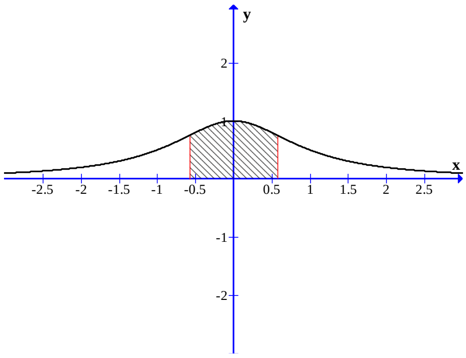
$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2};\, y'' = \frac{-2.(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x.(-2x)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2.(1+x^2) - 2.2.x.(-2x)}{(1+x^2)^3} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0;\, x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes en el intervalo dado.

$$\frac{1}{1+x^2} = 0;\ \nexists \text{ sol.}$$

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctag} x]_{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \operatorname{arctag}\sqrt{\frac{1}{3}} - \operatorname{arctag} -\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3}u^2.$$

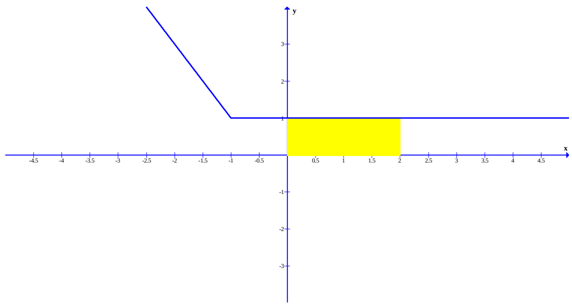
19. Dibuja la región limitada por la función $f(x) = |x+1| - x$ los ejes de coordenadas y la recta x = 2. Calcula el área.

$$f(x) = |x+1| - x = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Hallamos los puntos de corte con los ejes en el intervalo dado.

– 2x – 1 = 0; x = ½.

2. Representamos la función.



3. Calculamos el área.
Se trata de un rectángulo. Área = 2·1 = 2 u^2.

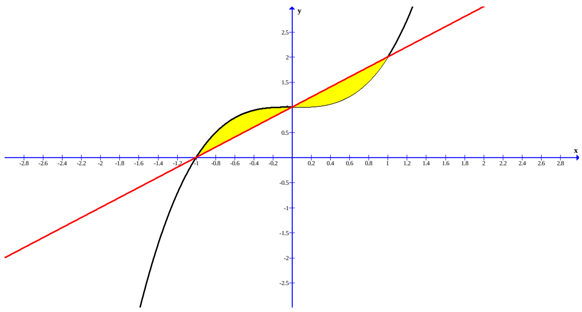
Área limitada por dos funciones.

20. U.IB. 2019. Dibuja el área comprendida entre las gráficas de las funciones siguientes y calcula el área del recinto anterior. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$
VER VÍDEO https://youtu.be/EF3V8z8No9Q

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$x^3 + 1 = x + 1 \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x\cdot(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 1, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{0}[x^3 + 1 - (x+1)]dx = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1}[x + 1 - (x^3+1)]dx = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

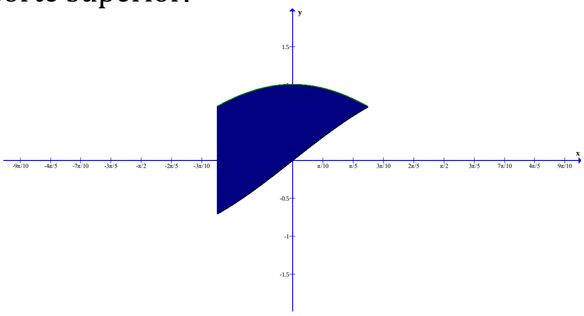
$$\text{Área total } = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}u^2$$

21. U.I.B. 2016. Dibuje un boceto aproximado de las curvas y = sen x e y = cos x, donde $x \in (-\pi/4, \pi/4)$, indicando los puntos en los que se cortan. Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores y las rectas verticales $x = \pm\frac{\pi}{4}$
VER VÍDEO https://youtu.be/fnJFT2m5-4M

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

Las gráficas, en el intervalo dado, se cortan en senx = cosx, $x = \frac{\pi}{4}$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde $-\pi/4$ a $\pi/4$, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}u^2.$$

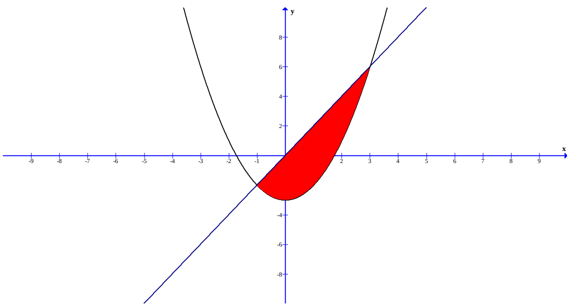
22. U.I.B. 2017. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3$ y $y = 2x$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/1Q_nCjfMhoQ

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 3, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{3} 2x - (x^2 - 3)dx = \frac{32}{3} \rightarrow \text{Área} = \frac{32}{3}u^2.$$

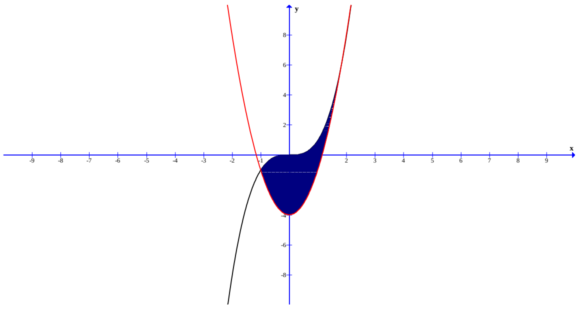
23. U.I.B. 2016. Dibuja el recinto limitado por las curvas $f = x^3$ y $g = 3x^2 - 4$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/mQvvWOj9YeQ

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x^2 - 4 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x^2 - 4 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 2, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{2} x^3 - (3x^2 - 4)dx = 6{,}75\ u^2$$

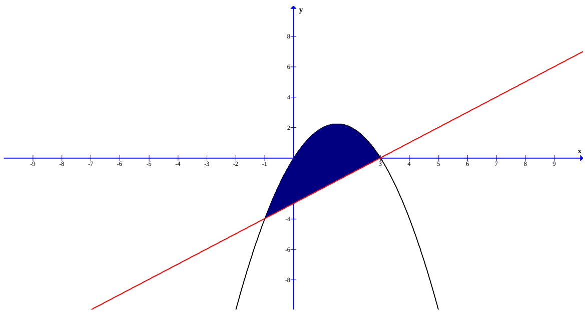
24. U.I.B. 2015. Haz un dibujo aproximado de las curvas $y = 3x - x^2$ y $y = x - 3$ indicando los puntos en que se cortan. Calcula el área del recinto limitado por ambas curvas.

VER VÍDEO https://youtu.be/VCqwBG6JZ2U

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

Resolver el sistema: $\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = x - 3 \end{cases} \rightarrow 3x - x^2 = x - 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 3, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{3} [3x - x^2 - (x - 3)]dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx = \frac{32}{3} u^2$$

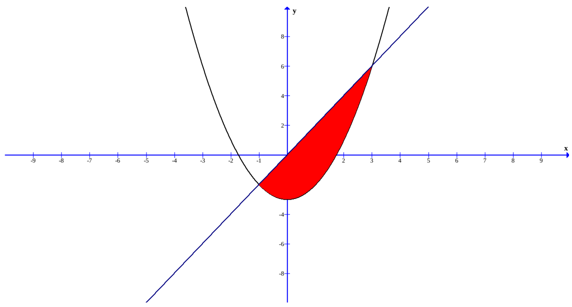
25. U.I.B. 2017. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3$ y $y = 2x$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/1Q_nCjfMhoQ

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde – 1 a 3, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

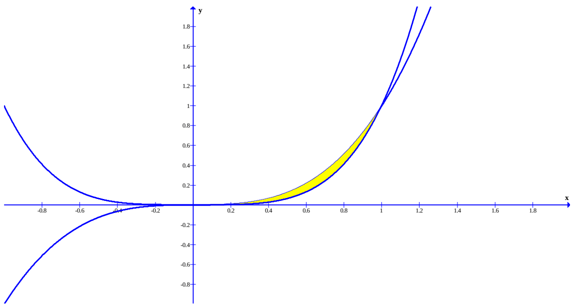
$$\int_{-1}^{3} 2x - (x^2 - 3)dx = \frac{32}{3} \rightarrow \text{Área} = \frac{32}{3}u^2.$$

26. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ y $y = x^4$. Calcula el área.
VER VÍDEO https://youtu.be/aJUD82dPnvs

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 1 a 0, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

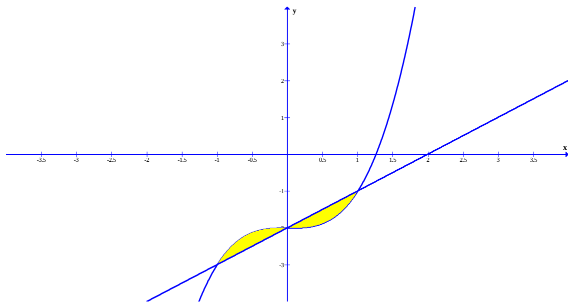
$$\int_{0}^{1} (x^3 - x^4)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}\,u^2$$

27. Dibujar la región limitada por las funciones $f = x^3 - 2$ y $g = x - 2$. Calcular el área de dicha región.
VER VÍDEO https://youtu.be/vL9y8XZnnLU

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = x^3 - 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \rightarrow x^3 - 2 = x - 2 \rightarrow x^3 = x \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde –1 a 1, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_{-1}^{0}(x^3-2)-(x-2)\,dx+\int_{0}^{1}(x-2)-(x^3-2)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\,u^2.$$

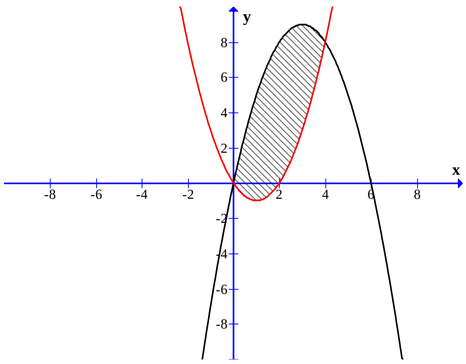
28. U.I.B. 2015. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/0_axoqVcNwA

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 0 a 4, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

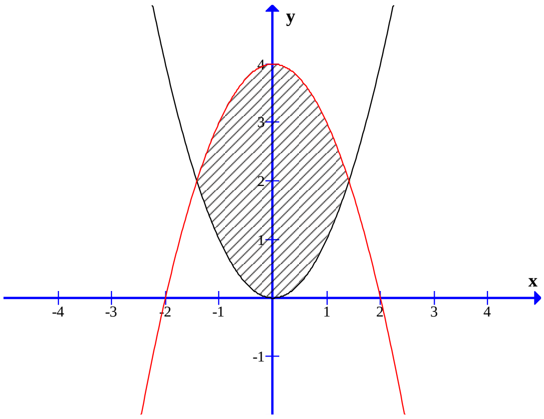
$$A=\int_{0}^{4}6x-x^2-(x^2-2x)\,dx=\int_{0}^{4}(-2x^2+8x)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+4x^2\right]_{0}^{4}=\frac{64}{3}u^2$$

29. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = 4 - x^2$, $y = x^2$, y calcula su área.

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$4 - x^2 = x^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde $x = \pm\sqrt{2}$, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)dx = \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3} u^2$$

30. Calcular el área de la región limitada por la hipérbola xy = 4 y la recta que la corta en los puntos de abscisas x = 1, x = 4. Dibuja dicha región.

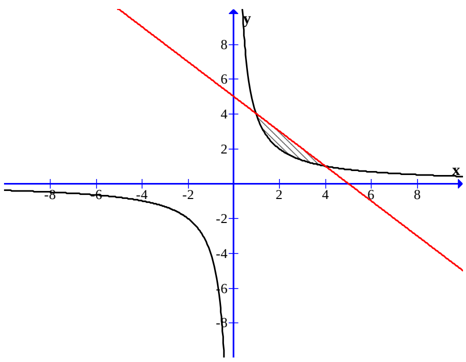
Hallamos la ecuación de la recta.

$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 4 \\ x = 4 \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow m = \frac{4-1}{1-4} = -1, \text{la recta es: } y = 4 - (x - 1); y = 5 - x$$

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow \frac{4}{x} = 5 - x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 1 a 4, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\int_1^4 5 - x - \frac{4}{x}\, dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x|\right]_1^4 = 20 - 8 - 4\ln 4 - \left(5 - \frac{1}{2} - 4\ln 1\right) =$$

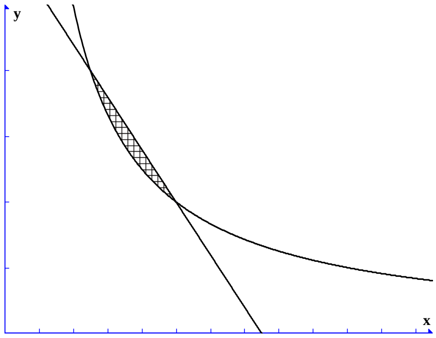
$$= \frac{15}{2} - 4\ln 4 \ u^2$$

31. Calcular el área del recinto limitado por la curva y = 1/x y la recta 2x + y = 3

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ 2x + y = 3 \end{cases} \rightarrow 2x + \frac{1}{x} = 3 \rightarrow 2x^2 + 1 = 3x \rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 1 a 4, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(3 - 2x - \frac{1}{x}\right) dx = [3x - x^2 - \ln|x|]_{\frac{1}{2}}^{1} \cong 0'057u^2$$

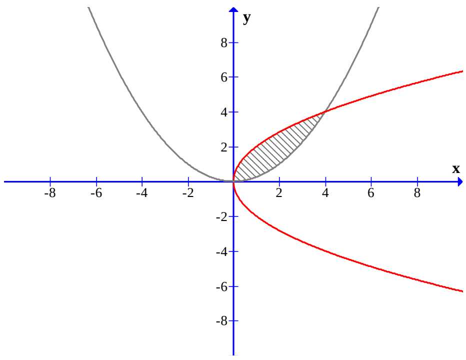
32. Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$. Calcula el área.

VER VÍDEO https://youtu.be/LOhaVmnnTEY

1. Buscar los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \rightarrow y = \dfrac{x^2}{4} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 4x \rightarrow x^4 = 64x \rightarrow x(x^3 - 64) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 0 a 4, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} - \frac{4^3}{12} = \frac{16}{3}u^2$$

Área limitada por dos funciones y una o dos rectas verticales.

33. Dibuja la región limitada por las curvas y = sin x , y = cos x , y las rectas x = 0 y x = π. Calcular el área.

1. Buscar los puntos de corte entre ambas en el intervalo dado [0,π].
$\text{sen x} = \cos x;\ x = \frac{\pi}{4}$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 0 a π, punto de corte inferior a punto de corte superior.

3. Calculamos el área.

$$\text{Área} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \text{sen}x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{sen}x - \cos x)dx =$$

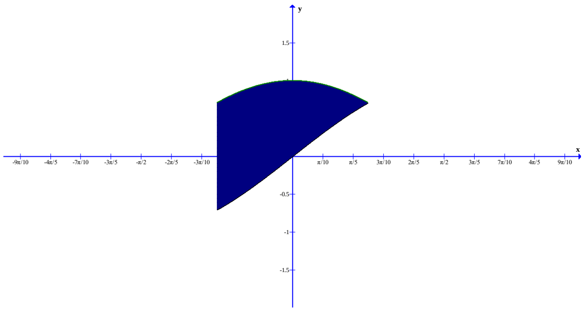
$$= [\text{sen}x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \text{sen}x]_{\pi/4}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}u^2$$

34. Dibuje un boceto aproximado de las curvas y = sen x e y = cos x, donde x ∈ (− π/4, π/4), indicando los puntos en los que se cortan. Calcular el área del recinto limitado por las dos curvas anteriores y las rectas verticales $x = \pm\frac{\pi}{4}$

VER VÍDEO https://youtu.be/fnJFT2m5-4M

1. Buscar los puntos de corte entre ambas en el intervalo dado $(-\pi/4, \pi/4)$.
$\text{sen x} = \cos x,\ x = \pi/4$.

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde $-\pi/4, \pi/4$, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

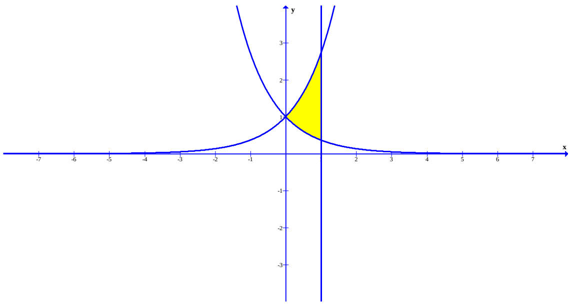
$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}u^2.$$

35. Dibuja el recinto limitado por las curvas f = e^x y g = e^{-x} y la recta x = 1. Calcula el área.

1. Buscar los puntos de corte entre ambas en el intervalo dado $(-\pi/4, \pi/4)$.

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{cases} \to e^x = e^{-x} \to x = 0$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 0 a 1, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

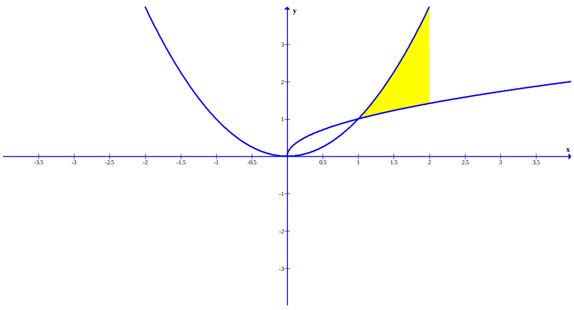
$$\int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2 \cong 1{,}086\ u^2$$

36. Dibuja el recinto limitado por las curvas y = x^2 , y = $\sqrt{x}$ y la recta x = 2. Calcula el área.

1. Buscar los puntos de corte entre ambas en el intervalo dado $(-\pi/4, \pi/4)$.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \to x^2 = \sqrt{x} \to x^4 = x \to x^4 - x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Una vez hallados los puntos de corte entre ambas funciones, realizamos un dibujo aproximado de ambas. En este caso, desde 0 a 2, punto de corte inferior a punto de corte superior.



3. Calculamos el área.

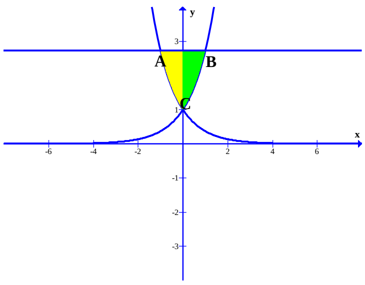
$$\int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + 3 \cong 1{,}114\, u^2.$$

Área limitada por tres funciones.

37. Hacer un dibujo del recinto limitado por las curvas para valores positivos de x. Calcula el área del recinto.

$$\mathbf{y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = 4x \;\; y \;\; y_3 = \frac{x}{4}}$$

1. Dibujo del recinto.



2. Hallamos los puntos A, B y C de la gráfica.
A = (0, 0); B = (½, 2) y C = (2, ½).
3. Calculamos el área.

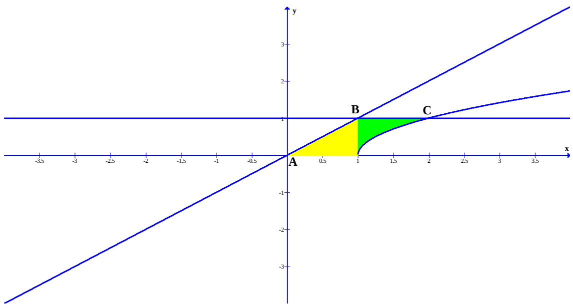
$$\text{Área roja} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(4x - \frac{x}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{15}{4} x dx = \left[\frac{15}{4}\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{32} u^2$$

$$\text{Área azul} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx = \left[\ln x - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} - \left(\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{32}\right) = \ln 4 - \frac{15}{32} u^2.$$

$$\text{Área total} = \ln 4 \; u^2$$

38. Dibuja el recinto limitado por las curvas f = x y g = $\sqrt{x-1}$, el eje X y la recta y = 1. Calcula el área.

1. Dibujo del recinto.



2. Hallamos los puntos A, B y C de la gráfica.

A = (0, 0); B = (1, 1) y C = (2, 1).

3. Calculamos el área.

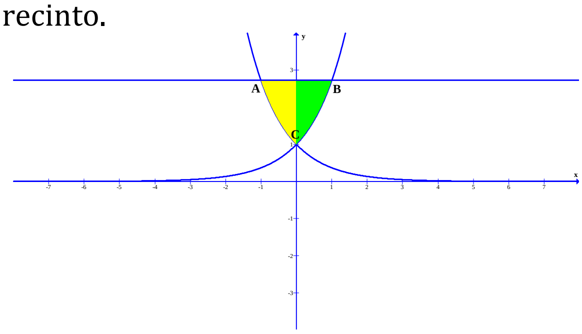
Área amarilla: $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ \mathrm{u}^2$

Área verde: $\int_1^2 \left(1 - \sqrt{x-1}\right)dx = \left[x - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ \mathrm{u}^2$

Área total: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\ \mathrm{u}^2$

39. Dibuja la región limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $y = e$

1. Dibujo del recinto.



2. Hallamos los puntos A, B y C de la gráfica.

A = (- 1, e); B = (1, e) y C = (0, 1).

3. Calculamos el área.

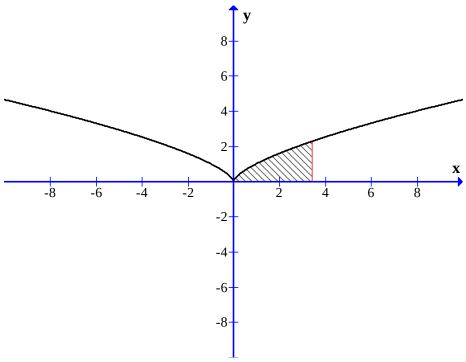
Área amarilla: $\int_{-1}^{0} (e - e^{-x})dx = [ex + e^{-x}]_{-1}^{0} = 1$

Área verde: $\int_{0}^{1} (e - e^{x})dx = [ex - e^{x}]_{-1}^{0} = 1$

Área total: 2 u^2.

Determinación de parámetros.

40. Sea A(t), t > 0, el área de la región limitada por la curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ y las rectes y = 0, x = t. Representar gráficamente esta región y calcular el valor de t para el cual A(t) = 1.



$$\text{Área} = \int_0^t \sqrt[3]{x^2}dx = \int_0^t x^{\frac{2}{3}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^t = \frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} = 1 \to t = \sqrt[5]{\left(\frac{5}{3}\right)^3}$$

41. Hallar los valores de a y b sabiendo que la función y = x^2 + ax + b tiene un mínimo en x = 2 y que

$$\int_0^1 y.\,dx = \frac{4}{3}$$

$y = x^2 + ax + b \to y' = 2x + a$

Mínimo en $x = 2 \to f'(2) = 0 \to 0 = 4 + a \to a = -4$

$$\int_0^1 y.\,dx = \frac{4}{3} \to \left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + bx\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{2} + b = \frac{4}{3} \to b = 3$$

42. Hallar el valor de a sabiendo que $\int_0^{\pi} \mathbf{senax\ dx} = \frac{2}{3}$.

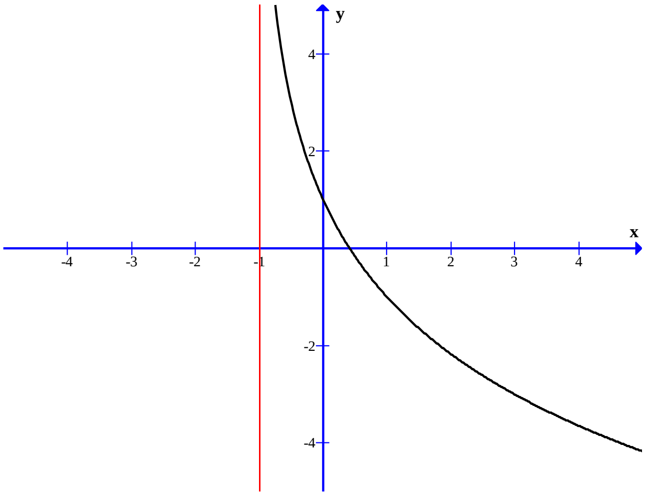
$$\int_0^{\pi} \text{senax dx} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi} a \cdot \text{senax dx} = \left[\frac{-1}{a}\text{cosax}\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{a}\left(\underbrace{\overbrace{\text{cosa}\pi}^{-1\ o\ 1}}_{-1} - \overbrace{\cos 0}^{1}\right) = \frac{-2}{a} = \frac{-2}{3}$$

$\to a = 3$

43. De una función y = f(x) , x > –1, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante. Determinar la función si, además, sabemos que f(0) = 1 y f(1) = –1. Haz una gráfica aproximada.

$$f(x)=\int \frac{a}{1+x}dx = a.\ln(1+x)+c \rightarrow \begin{cases} f(x)=a.\ln(1+x)+c \\ f(0)=1 \rightarrow c=1 \\ f(1)=-1 \rightarrow a.\ln 2+1=-1 \rightarrow a=\dfrac{-2}{\ln 2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{-2}{\ln 2}.\ln(1+x)+1$$



44. La curva y = a[4 – (x – 3)^2], con a > 0, limita con el eje X un recinto de 32 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

$$a[4-(x-3)^2]=0;\ -x^2+6x-5=0; \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\int_1^5 a[4-(x-3)^2]dx = a\int_1^5 [4-(x-3)^2]dx = a\int_1^5 (-x^2+6x-5)\,dx =$$

$$= a\left[\frac{-x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-5x\right]_1^5 = \frac{32a}{3}=32 \rightarrow a=3.$$

Otros.

45. Determina la función f(x), definida para x > 0, que verifica:

$$\mathbf{f\,'(x)-\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}=0 \text{ y } f(1)=0}$$

$$f\,'(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x^2} \rightarrow f(x)=\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-2}\right)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{-1}}{-1}+c=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{x}+c.\ \text{Para hallar c: } f(1)=0 \rightarrow \frac{2}{3}1\sqrt{1}+\frac{1}{1}+c=0 \rightarrow c=\frac{-5}{3}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\frac{-5}{3}$$

46. Dada la función f(x)

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}}$$

a) Calcular F(x) tal que F'(x)=f(x) para todo x.

b. Calcular la integral:

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{x^3}}{\sqrt{\mathbf{x^4+1}}}\mathbf{dx}$$

$$\text{a)} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx = \int x^3(x^4+1)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4+1)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{4}\frac{(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + c$$

$$\text{b)} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

47. Sea $\mathbf{I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}dx}$

a. Expresar I aplicando el cambio de variable x = t^2.

b. Calcular el valor de I.

a) $x = t^2 \to dx = 2t.dt$, sustituyendo, $\int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3+t}2tdt$

b)

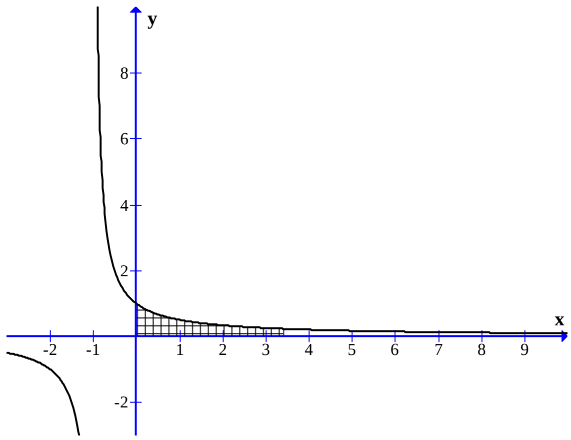
$$I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3+t}2tdt = 4\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{3+t}tdt = 4\left[\int_{t_1}^{t_2} 1 - 3\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{3+t}dt\right] =$$

$$[4(t - 3\ln|3+t|)]_{t_1}^{t_2} = \left[4(\sqrt{x} - 3\ln|3+\sqrt{x}|)\right]_0^1 = 4 - 12\ln 4 + 12\ln 3 = 4\left(\ln\frac{3}{4}\right)$$

48. Se considera la función, $A(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}dx$ t > 0. Haz una interpretación geométrica (en términos de área) de esta función. Calcular una fórmula más explícita para la función A(t) y represéntala gráficamente.

La funció, $A(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}dx$ es el área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x}$ y las rectas $x = 0$, $x = t$ y $y = 0$(eje X)

$$A(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}dx = [\ln|1+x|]_0^t = \ln(1+t)$$



49. Dada la función f(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x.\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pregunta:

a. Estudiar la continuidad.

b. Calcular el área de la región limitada por la curva y = f(x) i les rectes y = 0, x = k y x = 1, donde k es la abcisa del mínimo de la función. Dibuja de forma aproximada la región.

a) La función x.lnx es continua en $(0, \infty)$. Veamos si f(x) es continua en x = 0.

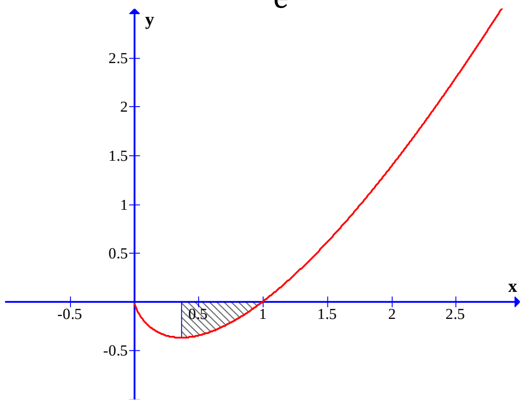
$$\left\{\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x = 0.(-\infty)\text{ind.} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}\text{ ind.} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0 \end{array}\right\} \to$$

$\to$ como $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \to$ la función es continua.

b) Buscamos k, el mínimo de la función.

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \to \ln x = -1 \to x = \frac{1}{e};\ f''(x) = \frac{1}{x} \to$$

$$\to f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \text{ Se confirma que en } x = \frac{1}{e} \text{ hay un mínimo.}$$



$$\int x.\ln x\,dx \underbrace{=}_{1} \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c;\ \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x) = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1} =$$

$$= \left[0 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2e^2}\ln\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{e^2}\right] = -\frac{3 - e^2}{4e^2} \to \text{Área} = \frac{3 - e^2}{4e^2}u^2.$$

1) $\begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \to v = \displaystyle\int x.\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$